第13講　確率(1)

【基礎確認事項】

［1］　事象と確率の定義

□さいころを投げて1の目が出たとする．一般に「さいころを投げる」などある実験や観察を行うことを**試行**といい，試行の結果「1の目が出る」など起こった現象を**事象**という．

□1つのさいころを投げたとき，「偶数の目が出る」という事象は「2の目が出る」，「4の目が出る」，「6の目が出る」という3つの事象に分けることができるが，「2の目が出る」という事象はこれ以上分けることができない．このように，これ以上分けることができない事象を**根元事象**といい，ある試行における根元事象すべての集合を**全事象**という．

例　1つのさいころを投げたときの根元事象は「1の目が出る」，「2の目が出る」，「3の目が出る」，「4の目が出る」，「5の目が出る」，「6の目が出る」で，その場合の数は6通りである．

□一般的に1つのさいころを投げるとき，どの目が出やすいということはない．このように，ある試行を行ったとき，どの根元事象が起こることも同程度に期待されるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という．

□根元事象が同様に確からしい試行で，根元事象がN通りあるとする．また，事象Aの根元事象がa通りあるとする．このとき，事象Aの起こる確率$P(A)$は次式で表される．

$$P(A)=\frac{a}{N}$$

以下で扱う試行においては，特に断りがない限り根元事象は同様に確からしいとする．

⇒　C&U 1

［2］　確率の基本性質と余事象

□同様に確からしい根元事象がN通りあり，そのうち事象Aの根元事象がa通りあるとすれば，$0\leqq a\leqq N$　である．したがって$0\leqq \frac{a}{N}\leqq 1$であることから

$$0\leqq P(A)\leqq 1$$

が成り立つ．

□$P(A)=0$のとき，Aは決して起こらない事象である．また，$P(A)=1$のとき，Aは必ず起こる事象であり，全事象そのものである．

□1つの試行において2つの事象A，Bがあるとき，A，Bがともに起こる事象をAとBの**積事象**といい，$\boldsymbol{A\cap B}$と表す．また，AかBの少なくとも一方が起こる（AまたはBが起こる）事象をAとBの**和事象**といい，$\boldsymbol{A\cup B}$で表す．

□このとき，次の定理が成り立つ．

確率の加法定理

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□A が起これば B が起こらず，B が起これば A が起こらないとき，A と B は互いに**排反**である，または，A と B は互いに**排反事象**である，という．

□このとき $P(A\cap B)=0$ であるから，次のことが成り立つ．

> **A と B が排反事象のときの加法定理**
> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

□A が起こらないという事象を A の**余事象**といい，$\overline{A}$ で表す．

□A と $\overline{A}$ は排反事象であり，また $A\cup\overline{A}$ は全事象である．したがって

$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$，$P(A\cup\overline{A})=1$ より以下が成り立つ．

> **余事象の確率**　$P(\overline{A})=1-P(A)$

⇒ C&U [2]

[3]　独立試行の乗法定理

□1つのさいころを投げる試行と，1つのコインを投げる試行は，その結果が互いに明らかに無関係である．このようにどの試行の結果も他の試行の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は**独立**であるという．

□独立な試行について，次のことが成り立つ．

> **独立試行の乗法定理**
> 2つの試行 S，T が独立であるとき，S で起こる事象 A，T で起こる事象 B について，
> $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

例　さいころ1個とコイン1枚を同時に投げたとき，さいころで偶数の目が出て，コインで表が出る確率について

さいころを投げる試行とコインを投げる試行は独立であり，2つの試行の全事象は　6×2 通りである．またさいころで偶数の目が出て，コインで表が出る事象は　3×1 通りである．

よって　$P(A\cup B)=\dfrac{3\times1}{6\times2}=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{2}=P(A)\cdot P(B)$　である．

他の例においても明らか．

また，独立な3つ以上の試行に関しても同様なことがいえる．

⇒ C&U [3]

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　赤球2個と白球3個が入った袋から球を2個取り出すとき，それがともに白球である確率を求めよ．

2　52枚のトランプのカードから1枚取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　スペードまたは11が出る確率

(2)　スペードまたはハートが出る確率

(3)　ダイヤが出ない確率

3　射的でAは5発中4発，Bは5発中3発の割合で命中させる力をもっている．A，Bが同時に矢を射るとき，A，Bの少なくとも一方が命中させる確率を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確率(1)

1　りんご2個，みかん2個，桃1個の合計5個の果物について，次の問いに答えよ．

(1)　5個の果物から4個を選び，1列に並べる方法は何通りあるか．

(2)　5個の果物から4個を選び1列に並べるとき，りんごが隣り合って並ぶ確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1から10までの数字が書かれた10枚のカードが袋に入っている．この袋の中から3枚のカードを同時に取り出す．次の確率を求めよ．

(1)　5のカードを取り出す確率

(2)　カードの数字の最大が8以上である確率

(3)　1または2のカードを取り出す確率

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　赤球 3 個，白球 7 個が入った袋Ａと，赤球 5 個，白球 5 個が入った袋Ｂがある．それぞれの袋から同時に 2 個ずつ球を取り出す場合を考える．次の確率を求めよ．

(1)　少なくとも 1 個の赤球が含まれている確率

(2)　赤球，白球の両方が含まれている確率

(3)　赤球 2 個，白球 2 個を取り出す確率

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　確率(1)

大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，目の出方は全部で [アイ] 通りある．出目の最大値が 5 になるか，または出目の最小値が 2 になる場合を求めたい．出目の最大値が 5 以下になるのは 2 個のさいころの出目がともに 1〜5 のときで，その場合の数は [ウエ] 通り．同様に出目の最大値が 4 以下になる場合の数は [オカ] 通り．よって出目の最大値が 5 になる確率は $\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．出目の最小値が 2 になる場合も同様に求められる．また，出目の最大値が 5 かつ出目の最小値が 2 になる確率は $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ である．したがって，出目の最大値が 5 になるか，または出目の最小値が 2 になる確率は $\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である．

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　確率(1)

【CHECK & UP】

1　5 個の球から 2 個の球を取り出す方法が ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=5\cdot2$（通り）

3 個の白球から 2 個取り出す方法が ${}_3C_2=3$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{5\cdot2}=\mathbf{\dfrac{3}{10}}$

> 確率の基本問題で，当然の結果と思う人もいるかもしれない．しかし，赤球 2 個，白球 3 個から 2 個取り出す場合の数は，赤赤，赤白，白白の「3 通り」である．では今回の確率の分母における 5･2＝10（通り）とは何であろうか？　それは確率の世界では「同じものもすべて区別して考える」ことを原則とするからである．さもないと，「根元事象が同様に確からしくない」状態を招く．
> 赤 2 個を R_1，R_2，白 3 個を W_1，W_2，W_3 と区別すると，
> 「赤赤」…$(R_1,\ R_2)$ の 1 通り
> 「赤白」…$(R_1,\ W_1)$，$(R_1,\ W_2)$，$(R_1,\ W_3)$，$(R_2,\ W_1)$，$(R_2,\ W_2)$，$(R_2,\ W_3)$ の 6 通り
> 「白白」…$(W_1,\ W_2)$，$(W_1,\ W_3)$，$(W_2,\ W_3)$ の 3 通り
> よって，「赤赤」，「赤白」，「白白」の 3 つの事象は，同様に確からしくないため，確率の根元事象として扱うことはできない．

2　(1)　1 枚引いたとき，スペードが出る確率が $\dfrac{13}{52}$，11 が出る確率が $\dfrac{4}{52}$

スペードの 11 である確率が $\dfrac{1}{52}$

よって求める確率は　$\dfrac{13}{52}+\dfrac{4}{52}-\dfrac{1}{52}=\dfrac{16}{52}=\mathbf{\dfrac{4}{13}}$

> 確率の加法定理
> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
> の確認である．

(2)　1 枚引いたとき，スペードが出る確率が $\dfrac{13}{52}$，ハートが出る確率が $\dfrac{13}{52}$

スペードとハートが同時に出ることはない．

よって求める確率は　$\dfrac{13}{52}+\dfrac{13}{52}=\dfrac{26}{52}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

> A と B が「排反事象」であるとき
> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

【別解】　1 枚引いたとき，「スペードが出る」，「ハートが出る」，「ダイヤが出る」，「クラブが出る」ことは同様に確からしい．このうち，「スペードが出る」または「ハートが出る」確率は　$\dfrac{2}{4}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(3)　1 枚引いたとき，ダイヤが出る確率は $\dfrac{13}{52}=\dfrac{1}{4}$

したがって，ダイヤが出ない確率は　$1-\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

> 「余事象」を求める方が楽，または余事象に当たるものが既知であるならば，積極的に用いて計算を楽にしよう．

3　A が命中させる確率は $\dfrac{4}{5}$，はずす確率は $\dfrac{1}{5}$

B が命中させる確率は $\dfrac{3}{5}$，はずす確率は $\dfrac{2}{5}$　である．

したがって，2 人ともはずす確率は　$\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{25}$

ゆえに，2 人のうち少なくとも一方が命中させる確率は　$1-\dfrac{2}{25}=\mathbf{\dfrac{23}{25}}$

> A が矢を射る行為と B が矢を射る行為は，数学的に全く「独立」した試行である．よってそれぞれの確率を求め，「乗法定理」で確率を求めることができる．
> また，この問題に関しても積極的に「余事象」を用いた．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　確率(1)

1　りんご 2 個，みかん 2 個，桃 1 個の合計 5 個の果物について，次の問いに答えよ．

(1)　5 個の果物から 4 個を選び，1 列に並べる方法は何通りあるか．

(2)　5 個の果物から 4 個を選び 1 列に並べるとき，りんごが隣り合って並ぶ確率を求めよ．

(1)　(i)　同じ種類の果物を 2 個ずつ含む場合

りんご 2 個，みかん 2 個を選ぶ場合で，その並べ方は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

(ii)　同じ種類の果物を 1 組のみ含む場合

同じ果物がりんご，みかんの場合で　2 通り

選ばなかった方 1 個と桃 1 個を含む 4 個の並べ方は　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

よってこの場合の数は　$2\times12=24$（通り）

したがって，並べ方の総数は　$6+24=$ **30（通り）**

(2)　2 個のりんごを A_1，A_2，2 個のみかんを B_1，B_2，桃を C とし，すべて区別して考える．

これら 5 個の果物から 4 個を選んで 1 列に並べる方法は　${}_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2$（通り）

りんごが隣り合うためには，A_1，A_2 を 4 個の中に含む必要がある．

A_1，A_2 を選ぶとき，残り　B_1，B_2，C の 3 個の中から 2 個を選ぶ方法が　${}_3C_2=3$（通り）

選んだ 4 個を，A_1，A_2 が隣り合うように並べる方法について，

A_1，A_2 を 1 組として 3 個を並べる方法が　3! 通り

A_1，A_2 の並べ方が　2! 通り

よって，A_1，A_2 が隣り合う並べ方は　$3!\times2!=12$（通り）

したがって，求める確率は　$\dfrac{3\times12}{{}_5P_4}=\dfrac{3\times12}{5\cdot4\cdot3\cdot2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

2　1 から 10 までの数字が書かれた 10 枚のカードが袋に入っている．この袋の中から 3 枚のカードを同時に取り出す．次の確率を求めよ．

(1)　5 のカードを取り出す確率

(2)　カードの数字の最大が 8 以上である確率

(3)　1 または 2 のカードを取り出す確率

1 から 10 までのカードの中から 3 枚を同時に取り出す方法が　${}_{10}C_3=10\cdot3\cdot4$（通り）

(1)　5 のカードを取り出すとき，残り 9 枚から 2 枚を取り出す方法が　${}_9C_2=9\cdot4$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{9\cdot4}{10\cdot3\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(2)　最大の数字が 8 以上になるのは，最大の数字が 8，9，10 のいずれかのときである．

最大の数字が 8 のとき，1 から 7 までの 7 枚から 2 枚を取り出す方法で　${}_7C_2=21$（通り）

最大の数字が 9 のとき，1 から 8 までの 8 枚から 2 枚を取り出す方法で　${}_8C_2=28$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

最大の数字が10のとき，1から9までの9枚から2枚を取り出す方法で　${}_9C_2=36$（通り）

よって求める確率は　$\frac{21}{{}_{10}C_3}+\frac{28}{{}_{10}C_3}+\frac{36}{{}_{10}C_3}=\frac{85}{10\cdot3\cdot4}=\boldsymbol{\frac{17}{24}}$

【別解】　最大の数字が7以下になる事象をAとすると，求める確率は　$1-P(A)$である．

事象Aは1から7までの7枚から3枚を取り出すときで　${}_7C_3=7\cdot5$（通り）

したがって求める確率は　$1-\frac{7\cdot5}{{}_{10}C_3}=1-\frac{7\cdot5}{10\cdot3\cdot4}=1-\frac{7}{24}=\boldsymbol{\frac{17}{24}}$

(3)　1を取り出すとき，残りのカードの取り出し方が　${}_9C_2=36$（通り）

2を取り出すとき，残りのカードの取り出し方が　${}_9C_2=36$（通り）

1と2を取り出すとき，残りのカードの取り出し方が　${}_8C_1=8$（通り）

よって求める確率は　$\frac{36}{{}_{10}C_3}+\frac{36}{{}_{10}C_3}-\frac{8}{{}_{10}C_3}=\frac{64}{10\cdot3\cdot4}=\boldsymbol{\frac{8}{15}}$

【別解】　最小の数字が3以上になる事象をBとすると，求める確率は　$1-P(B)$である．

事象Bは3から10までの8枚から3枚を取り出すときで　${}_8C_3=8\cdot7$（通り）

したがって求める確率は　$1-\frac{8\cdot7}{{}_{10}C_3}=1-\frac{8\cdot7}{10\cdot3\cdot4}=1-\frac{7}{15}=\boldsymbol{\frac{8}{15}}$

3　赤球3個，白球7個が入った袋Aと，赤球5個，白球5個が入った袋Bがある．それぞれの袋から同時に2個ずつ球を取り出す場合を考える．次の確率を求めよ．

(1)　少なくとも1個の赤球が含まれている確率

(2)　赤球，白球の両方が含まれている確率

(3)　赤球2個，白球2個を取り出す確率

(1)　取り出した球がすべて白球であるのは，Aから白球2個，Bから白球2個取り出した場合．

その確率は　$\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7\cdot3}{5\cdot9}\times\frac{5\cdot2}{5\cdot9}=\frac{14}{135}$

よって，少なくとも1個の赤球が含まれている確率は　$1-\frac{14}{135}=\boldsymbol{\frac{121}{135}}$

(2)　取り出した球がすべて赤球である確率は　$\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{3}{5\cdot9}\times\frac{5\cdot2}{5\cdot9}=\frac{2}{135}$

よって，赤球，白球の両方が含まれている確率は　$1-\left(\frac{14}{135}+\frac{2}{135}\right)=1-\frac{16}{135}=\boldsymbol{\frac{119}{135}}$

(3)　赤球2個，白球2個となるのは，以下の場合

(i)　Aから赤球2個，Bから白球2個を取り出す

(ii)　Aから赤球1個と白球1個，Bから赤球1個と白球1個を取り出す

(iii)　Aから白球2個，Bから赤球2個を取り出す

(i)の確率は　$\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{135}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ii)の確率は　$\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_2}=\dfrac{3\cdot7}{5\cdot9}\times\dfrac{5\cdot5}{5\cdot9}=\dfrac{35}{135}$

(iii)の確率は　$\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{14}{135}$

したがって求める確率は　$\dfrac{2}{135}+\dfrac{35}{135}+\dfrac{14}{135}=\dfrac{51}{135}=\boldsymbol{\dfrac{17}{45}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確率(1)

大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の出方は全部で［アイ］通りある．出目の最大値が5になるか，または出目の最小値が2になる場合を求めたい．出目の最大値が5以下になるのは2個のさいころの出目がともに1～5のときで，その場合の数は［ウエ］通り．同様に出目の最大値が4以下になる場合の数は［オカ］通り．よって出目の最大値が5になる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．出目の最小値が2になる場合も同様に求められる．また，出目の最大値が5かつ出目の最小値が2になる確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ である．したがって，出目の最大値が5になるか，または出目の最小値が2になる確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である．

目の出方は全部で　$6^2=\mathbf{36}$（通り）

出目の最大値が5以下になるのは，$5^2=\mathbf{25}$（通り）

出目の最大値が4以下になるのは，$4^2=\mathbf{16}$（通り）

よって，出目の最大値が5になるのは　$25-16=9$（通り）

したがって，出目の最大値が5になる確率は　$\dfrac{9}{36}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$　である．

同様に，出目の最小値が2になるのは，出目の最小値が2以上になる場合から，出目の最小値が3以上になる場合を除いた　$5^2-4^2=9$（通り）

よって，出目の最小値が2になる確率は $\dfrac{1}{4}$ である．

また，出目の最大値が5　かつ　出目の最小値が2となるのは，2個のさいころの出目の組合せが(2, 5)のときで，その場合の数は　$2!=2$（通り）である．

よって，出目の最大値が5　かつ　出目の最小値が2となる確率は　$\dfrac{2}{36}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$　である．

したがって，出目の最大値が5，または出目の最小値が2となる確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{18}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$$